Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Dacunha-Castelle

Ultraproduits d'espaces de Banach

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 9, p. 1-11.

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

ULTRAPRODUITS D'ESPACES DE BANACH

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N° IX

8 Décembre 1971

<u>Définition 1</u> : Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach. On définit $\hat{B}$ par :

$\hat{B} = \{(f_i)_{i\in I},\ f_i \in B_i,$ il existe M tel que $\|f_i\| < M$ pour tout $i\in I\}$.

On pose $\|(f_i)_{i\in I}\| = \lim\limits_{\mathfrak{U}} \| f_i \|$, (1) ,

$\mathfrak{U}$ étant un ultrafiltre non trivial sur I.

Soit

$$\mathfrak{N} = \{(f_i)_{i\in I},\ \|(f_i)_{i\in I}\| = 0\}$$

Par définition l ultraproduit $\prod_{i\in I} B_i/\mathfrak{U}$ des espaces $(B_i)_{i\in I}$ suivant l'**ultrafiltre** $\mathfrak{U}$ est le quotient $\hat{B}/\mathfrak{N}$.

<u>Proposition 1</u> : $\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathfrak{U}$ est un espace de Banach.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que (1) définit une semi-norme. $\hat{B}/\mathfrak{N}$ est donc normé.

Soit une suite $(f_i^n)_{i\in I}$ d'éléments tels que $\|(f_i^n)_{i\in I}\| \leq \frac{1}{2^n}$. Il suffit de montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (f_i^n)_{i\in I}$ converge dans $\hat{B}/\mathfrak{N}$. A n fixé, on peut trouver $(g_i^n) \sim (f_i^n)$ (mod $\mathfrak{N}$) avec $\|g_i^n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout i. (prendre $g_i^n = f_i^n$ lorsque $\|f_i^n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $g_i^n = 0$ si $\|f_i^n\| > \frac{1}{2^{n-1}}$).

Alors pour tout i, on pose $g_i = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_i^n$, $g_i \in B_i$ et $\sum\limits_1^n (f_i^k)_{i\in I}$ converge vers $(g_i)_{i\in I}$, puisque $\sum\limits_i^n (g_i^k)_{i\in I} \sim \sum\limits_i^n (f_i^k)_{i\in I}$ modulo $\mathfrak{N}$. <u>cqfd</u>.

L'exemple d'ultraproduit qui suit nous sera utile. Soit B un Banach. $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de B; si $P \in \mathcal{P}$, soit B_P le sous-espace de Banach de B engendré par P

Sur $\mathcal{P}$, on considère un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ tel que pour tout P, $\{P', P' \in \mathcal{P}, P' \supset P\} \in \mathfrak{U}$.

<u>Proposition 2</u> : Avec les notations ci-dessus, il existe une isométrie (canonique) $B \to \prod_{P \in \mathcal{P}} B_P/\mathfrak{U}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in B$. Posons

$$\hat{x} = (x_P)_{P \in \mathcal{P}} \text{ où } x_P = x \text{ si } x \in B_P$$
$$x_P = 0 \text{ si } x \notin B_P.$$

L'application $x \to \hat{x}$ est clairement une isométrie.

<u>Définition 2</u> : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach,
a) $\mathcal{C}$ est dite stable par sous-espace si $B \in \mathcal{C}$ et C sous-espace de B implique $C \in \mathcal{C}$.
b) $\mathcal{C}$ est dite stable par isométrie si B est un Banach tel qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ et une isométrie de B sur C alors $B \in \mathcal{C}$.
c) $\mathcal{C}$ est dite stable par ultraproduit, si $(C_i)_{i \in I}$ étant une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{C}$, $\prod_{i \in I} B_i/\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$.

Exemple de classes stables par sous-espace, isométrie, ultraproduit.
1- $\mathcal{C} = \{$sous-espace de $\mathbb{R}^n$, n fixé$\}$ (trivial)
2- $\mathcal{C} = \{$classe L^2 des espaces de Hilbert)
3- Soit B un Banach, $\mathcal{C} = \{B^{I/\mathfrak{U}}$ des ultrapuissances de B$\}$ (facile).

<u>Théorème 3</u> : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes.
1- $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit, sous-espace, isométrie
2- $\mathcal{C}$ est caractérisée par un ensemble Γ de conditions du type.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, [(\|x_i + x_j + x_k\|, \ 1 \le i, j\ k \le n) \in C_n]$$

où C_n est un cône fermé de $\mathbb{R}^{n^3}$.

La condition 2 signifie que $\mathcal{C}$ est la seule classe telle que pour tout n-uplet $(x_1,\dots x_n)$ d'éléments de $B \in \mathcal{C}$, toutes les conditions Γ sont vraies.♦

Démonstration : $2 \to 1$ est trivial.
Pour montrer que $1 \to 2$, considérons l'ensemble Γ' des conditions satisfaites pour tout $B \in \mathcal{C}$ du type suivant :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \ (\bigvee [\ \|x_i + x_j + x_k\| \neq b_{ijk}\ ] \ 1 \leq i,j,k, \leq n)$$

où $b,i,j,k \in \mathbb{R}$; (Γ peut être vide, par exemple si $\mathcal{C}$ est la classe SL^∞ des sous-espaces de L^∞), et $\bigvee$ signifie la disjonction♦♦.
Soit C un Banach vérifiant Γ'. Soit $P = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ une partie finie de C. Il existe alors un espace $B \in \mathcal{C}$, une partie finie $\{\bar\alpha_1, \dots, \bar\alpha_n\}$ de B telle que

(2) $\|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| = \|\bar\alpha_i + \bar\alpha_j + \bar\alpha_k\|$, $1 \leq i,j,k \leq n$

En effet s'il n'existait pas $\{\bar\alpha_i, \dots, \bar\alpha_n\}$ vérifiant (2), on aurait

(3) $\forall x_1 \dots \forall x_n \ (\bigvee [\|x_i + x_j + x_k\| \neq \|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\|], \quad 1 \leq i,j,k, \leq n)$.

Donc (3) serait une des conditions de Γ' elle serait vérifiée par C ce qui est faux (faire $x_i = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$).
$P = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ étant fixé, soit V_P le sous-espace de Banach engendré par $(\bar\alpha_1, \dots, \bar\alpha_n)$.

♦ Remarque : Toute classe $\mathcal{C}$ caractérisée par un ensemble de formules du type

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \ (\ \|\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i\|_{j=1\dots m} \in C_m)$$

où $(a_i^j)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots m}}$ est une matrice réelle, est stable par ultraproduit, sous-espace et isométrie. Nous avons choisi des matrices les plus amples possibles pour énoncer le théorème.

♦♦ C'est-à-dire $\bigvee \|x_i+x_j+x_k\| \neq b_{ijk}$ $1 \leq i,j,k \leq n$ signifie que la formule est vérifiée si et seulement si l'une au moins des formules $\|x_i+x_j+x_k\| \neq b_{ijk}$ est vérifiée.

Il est facile de vérifier que la condition

$$\|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| = \|\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j + \bar{\alpha}_k\| \ , \ 1 \leq i ; j \ k \leq n$$

implique que l'application $\alpha_i \to \bar{\alpha}_i$ définit une isométrie linéaire de l'espace engendré par P sur V_P.
Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties finies de C tel que pour tout P, $\{P', P' \supset P\} \in \mathfrak{U}$. Alors $\prod_{P \in \mathcal{P}} V_P/\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit. L'application $\alpha \to (\bar{\alpha}_P)_{P \in \mathcal{P}}$ de $C \to \prod_{P \in \mathcal{P}} V_P/\mathfrak{U}$, où $\bar{\alpha}_P$ est définie plus haut si $\alpha \in P$ et $\bar{\alpha}_P = 0$ si $\alpha \notin P$ est une isométrie, puique linéaire et que $\|(\bar{\alpha}_P)_{P \in \mathcal{O}}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|\bar{\alpha}_P\| = \|\alpha\|$ d'après la propriété de $\mathfrak{U}$ $\mathcal{C}$ étant stable par isométrie, et sous-espace, on a donc $C \in \mathcal{C}$.
Soit maintenant F_n l'ensemble des points (b_{ijk}) $1 \leq i, j, k \leq n$ de $\mathbb{R}^{n^3}$ apparaissant dans Γ'.
Soit C_n le complémentaire de F_n.
C_n est un cône. Il suffit de montrer que C_n est fermé. Soit (b^m_{ijk}) une suite de points de $\mathbb{R}^{n^3}$ convergeant vers (b_{ijk}).
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un espace $B_m \in \mathcal{C}$ et $\{\alpha^m_1, \ldots \alpha^m_n\} \subset B_m$ tels que $\|\alpha^m_i + \alpha^m_j + \alpha^m_k\| = b^m_{ijk}$ pour tout $1 \leq i, j, k \leq n$ (puisque $(b^m_{ijk}) \in \mathbb{R}^{n^3} - F_n$ d'après la définition même de F_n). Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ non trivial et $B = \prod_{m \in \mathbb{N}} B_m/\mathfrak{U}$. B est dans $\mathcal{C}$ (stable par ultraproduit).
Soit $\alpha_i = (\alpha^m_i)_{m \in \mathbb{N}}$ On a

$$\begin{aligned}\|\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k\| &= \lim_{\mathfrak{U}} \|\alpha^m_i + \alpha^m_j + \alpha^m_k\| \\ &= \lim_{\mathfrak{U}} b^m_{ijk} \\ &= b_{ijk}, \ 1 \leq i, j, k \leq n,\end{aligned}$$

donc la condition

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n (\bigvee [\|x_i + x_j + x_k\| \neq b_{ijk}], \ 1 \leq i, j, k \leq n)$$

n est pas vérifiée par B donc $(b_{ijk}) \in C_n$. cqfd

Définition 3 : Une classe $\mathcal{C}$ de Banach est dite stable par quotient si pour tout $B \in \mathcal{C}$, tout quotient B/R de B par sous-espace fermé $R \in \mathcal{C}$.

Proposition 4 : Si $\mathcal{C}$ est une classe stable par ultraproduit, sous-éspace isométrie, $Q\mathcal{C}$ la classe des quotients a les mêmes propriétés.

Démonstration : Il est facile de montrer que l'on a

$$\prod_{i\in I} B_i/R_i/\mathfrak{U} = \prod_{i\in I} B_i/\mathfrak{U} \Big/ \prod_{i\in I} R_i/\mathfrak{U}$$

(il existe une isométrie canonique triviale entre les deux espaces).
Il est intéressant de remarquer qu'un ultraproduit de quotients (non trivial) est toujours un quotient fort c'est-à-dire un quotient dans lequel il existe un élément de chaque classe d'équivalence ayant même norme que sa classe).

Définition 5 :

a) Deux espaces de Banach B et C sont dits λ-isomorphes s'il existe un isomorphisme $T : B \to C$ tel que $\|T\| \; \|T^{-1}\| \leq \lambda \quad (\lambda \geq 1)$.

b) Si $\mathcal{C}$ est une classe de Banach stable par isométrie, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la classe des Banach tels qu'il existe $B \in \mathcal{C}$, C et B étant λ-isomorphes.

Théorème 5 : Si $\mathcal{C}$ est stable par sous-espace, ultraproduit, isométrie, $\mathcal{C}_\lambda$ a les mêmes propriétés et admet donc une caractérisation par des formules Γ_λ du type de celles introduites au théorème 3.

Démonstration : Soit $T_i : B_i \to C_i$ un λ-isomorphisme pour tout $i \in I$. L'application $\prod_{i\in I} T_i/\mathfrak{U}$ de $\prod_{i\in \mathfrak{U}} B_i/\mathfrak{U} \to \prod_{i\in I} C_i/\mathfrak{U}$ définie par $(x_i)_{i\in I} \to (Tx_i)_{i\in I}$ est encore un λ-isomorphisme. Si $C_i \in \mathcal{C}$ pour tout $i \in I$, il en est de même de $\prod_{i\in I} C_i/\mathfrak{U}$ d'ou le résultat.

Définition 6 : Soit B et C deux espaces de Banach. On appelle p-somme de B et C et l'on note $(B \oplus C)_p$ l'espace B + C muni de la norme définie par $\|x+y\|_{(B\oplus C)_p} = (\|x\|^p_B + \|y\|^p_C)^{1/p}$; $(0<p<\infty)$.

Une classe $\mathcal{C}$ est dite stable par p-somme si $B, C \in \mathcal{C}$ implique $(B \oplus C)_p \in \mathcal{C}$.

Théorème 6 : Les conditions suivantes sont équivalentes pour une classe $\mathcal{C}$ d'espaces de Banach:

1- $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit, p-somme , sous-espace, isométrie.

2- $\mathcal{C}$ est caractérisée par un ensemble (Γ) de conditions du type

(4) $$\forall x_1 \ldots x_n \ (\sum_{1\leq i,j,k\leq n} \|\lambda_{i,j,k}\|^p > 0) .$$

Exemples :

- La classe SL^p des sous-L^p, $1 < p < \infty$ est stable par ultraproduit, sous-espace, isométrie, p-somme, (nous donnerons plus loin la démonstration). De plus c'est la plus petite classe contenant $\mathbb{R}$ et stable par ultraproduit. (Pour le vérifier on remarquera que cette classe $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ doit contenir l^p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $L_p[(0,1),dx] \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} l^p_n/\mathfrak{U}$, enfin que si $\mathcal{C}_p(B)$ est la plus petite classe contenant B stable par p-somme $\mathcal{C}_p(L_p((0,1),dx)) = L_p$. Cette remarque sera fréquemment utilisée par la suite. On déduit de cette remarque que :

Proposition 7 :

a) La classe SL_p est caractérisée par toutes les formules du type (4) qui sont vraies sur $\mathbb{R}$.

b) De manière générale la plus petite classe contenant un espace B et stable par p-somme, isométrie, sous-espace et ultraproduit est caracrérisée par les formules du type (4) vraies sur B.

- Les classes λSL^p et QSL^p satisfont aussi aux conditions du théorème 6. Remarquons qu'à partir de la caractérisation de ces classes on peut obtenir d'intéressants résultats concernants certaines classes d'opérateurs p-sommant, p-intégraux ([2],[3]). La théorie développée ici donne une démonstration unitaire pour SL^p, λSL^p, QSL^p etc... et permet de retrouver de manière naturelle les résultats de ([1],[2],[3])

<u>Démonstration du théorème 6</u> : On peut écrire l'ensemble Γ des formules (3) caractérisant $\mathcal{C}$ sous la forme :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\|x_i + x_j + x_k\|^p, \ 1 \leq i,j,k \leq n \in C_n^p) \qquad (4)$$
$$3$$

où C_n^p est un cône de $\mathbb{R}^{n^3}$.

Soit D_n^p l'ensemble des points du cône effectivement atteints, c'est-à-dire tels qu'il existe au moins $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\} \subset B$ avec $B \in \mathcal{C}$ et

$$(\|x_i + x_j + x_k\|) \in C_n^p$$
$$1 \leq i,j,k \leq n$$

Alors D_n^p est un cône convexe, car si $(\overline{y_r}, \ldots, \overline{y_n}) \subset C$, avec $C \in \mathcal{C}$, on a $x_i + y_i \in (C \oplus B)_p$ pour $1 \leq i \leq n$ et

$$\| x_i + y_i + x_j + y_j + x_k + y_k\|^p = \|x_i + x_j + x_k\|^p + \|y_i + y_j + y_k\|^p,$$
$$1 \leq i,j,k \leq n$$

donc $(\|x_i + x_j + x_k\|^p + \|y_i + y_j + y_k\|^p) \in D_n^p$. $\qquad 1 \leq i,j,k \leq n$

Soit $(\lambda^{\alpha}_{ijk})_{\alpha \in \Lambda}$ les formes linéaires définissant tous les plans d'appui du cône convexe D_n^p. (1) équivaut donc à l'ensemble des conditions

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n (\sum_{1 \leq i,j,k \leq n} \lambda^{\alpha}_{ijk} \|x_i + x_j + x_k\|^p \geq 0), \ \alpha \in \Lambda. \qquad \underline{\text{cqfd}}.$$

Le théorème suivant est un cas particulier d'un théorème général dû à Krivine. Son intérêt, qui nous semble très grand, est de donner une démonstration unique pour la caractérisation des classes λSL^p, QSL^p, λQSL^p (et d'autres); mais surtout de donner un moyen mécanique simple pour passer de la caractérisation de la classe SL^p à celle des classes voisines. Plus simple que les techniques "à base d'opérateurs" il montre surtout que contrairement à certaines idées, il n'y a pas une théorie "aux isométries près" et une théorie aux isomorphismes près.

<u>Théorème 8</u> : Soit E un ensemble, $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach stable par p-somme, isométrie, sous-espaces, ultraproduit. Soit Λ un ensemble d'indices et une application

$$\Lambda \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}^n\times\mathcal{P}$$

$$\alpha \to (m_\alpha\ M_\alpha,(\lambda_i^\alpha)_{i=1\dots n(\alpha)},\ \{a_1^\alpha\dots a_{n(\alpha)}^\alpha\})$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties finies de E. Enfin à chaque élément $a \in E$ on associe une variable x_a.

Les conditions suivantes sont alors équivalentes

1- Il existe $\varphi : E \to C$, où $C \in \mathcal{C}$ telle que

$$m_\alpha \leq \|\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ \varphi(a_i^\alpha)\| \leq M_\alpha$$

$\alpha \in \Lambda$.

2- Pour toute formule du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha \|\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ x_i^\alpha\|^p \geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha \|\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha\ x_i^\alpha\| \quad (\Lambda_o\subset\Lambda,\ \Lambda_o \text{ fini},\ \rho_\alpha,\rho'_\alpha\in\mathbb{R}^+$$

pour tout $\alpha \in \Lambda$) qui est vraie dans tout $C \in \mathcal{C}$ (x_i^α est la variable qui correspond à a_i^α donc si $a_i^\alpha = a_j^\beta$, x_i^α et x_j^β sont les mêmes variables) on a

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha\ M_\alpha \geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha\ M_\alpha .$$

<u>Théorème 9</u> : La classe $\lambda\ SL^p$ est caractérisée par l'ensemble des conditions du type

$$\forall x_1\dots\forall x_n\ [\lambda\sum_{1\leq i,j,k\leq n}\rho_{i,j,k}\|x_i+x_j+x_k\|^p \geq \sum_{1\leq l\leq n}\sigma_l\|x_l\|^p] ;$$

$\rho_{i,j,k},\sigma_l \in \mathbb{R}^+$ sont tels que la condition

$$\forall x_1\dots\forall x_n\ [\sum_{1\leq i,j,k\leq n}\rho_{i\ j,k}|x_i+x_j+x_k|^p \geq \sum_{1\leq l\leq n}\sigma_l|x_l|^p]$$ soit vraie sur $\mathbb{R}$

<u>Démonstration</u> : Pour que $E \in \lambda\text{-}SL^p$, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathcal{C}$ et $\varphi : E \to C$ telle que

$$\|a\| \leq \|\varphi(a)\| \leq \lambda\|a\|$$

et

$$\forall a\ \forall b\ \forall c \quad \|\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)\| \leq \lambda\ \|a + b + c\|$$

car cette dernière condition implique la linéarité de φ.
Considérons alors les conditions du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} (\rho_\alpha \|x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha\|^p + \sigma_\alpha \|x_4^\alpha\|^p)$$

$$\geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} (\rho'_\alpha \|x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha\|^p + \sigma'_\alpha \|x_4^\alpha\|^p)$$

qui sont vraies sur L^p. Vu leur forme, il suffit de considérer celles qui sont vraies sur $\mathbb{R}$ (elles constituent en effet le même ensemble de formules d'après une remarque faite avant la proposition 7). Pour les termes $(a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha)$ on a $M_\alpha = \lambda\|a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha\|$, $m_\alpha = 0$, pour les termes a_4^α on a $m_\alpha = \|a_4^\alpha\|$ et $M_\alpha = \lambda\ \|a_4^\alpha\|$, d'où le théorème en notant maintenant $\{x_1 \ldots x_n\}$ l'ensemble $\{x_1^\alpha, \ldots, x_4^\alpha,\ \alpha\in\Lambda_o\}$.

<u>Théorème 10</u> : La classe $\lambda\text{-}QSL^p$ est caractérisée par l'ensemble des conditions du type

$$\forall x_1, \ldots \forall x_n \ (\lambda \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \geq \sum_{j=1}^n \|\sum_{i=1}^n a_i^j\ x_i\|^p$$

où $(a_i^j)_{\substack{i=1\ldots n\\ \gamma=1\ldots n}}$ sont les matrices réelles telles que la condition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq \sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^n a_i^j\ x_i|^p$$

soit vraie sur $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\lambda = 1$. D'après la remarque faite plus haut, il suffit de caractériser les quotients forts de SL^p.
Soit E un Banach, c'est un quotient de SL^p s'il existe φ, C tels que

$$\varphi : E \to C, \ C \in SL^p$$

avec 1- $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$

2- $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \varphi(a_i)\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\|$.

Les conditions à étudier sont donc celles du type

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho_\alpha \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \ x_i^\alpha\|^p + \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \sigma_{\alpha,1} \|x_1\|^p \geq \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \rho'_\alpha \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \ x_i^\alpha\|^p + \sum_{\alpha\in\Lambda_o} \sigma'_{\alpha,1} \|x_1\|^p$$

qui sont vraies sur SL^p; donc comme précédemment il suffit d'étudier celles qui sont vraies sur $\mathbb{R}$, d'où le résultat moyennant des modifications élémentaires et un changement de notations. On passe ensuite du cas $\lambda = 1$ au cas λ quelconque par la même démonstration que celle du théorème 9.
(Remarque : on vérifiera sans peine que si M_α n'intervient pas, c'est à-dire peut-être pris arbitrairement grand, on peut supprimer le terme correspondant à M_α dans le théorème 8.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine : Lois stables et espaces L^p. Annales Inst. H. Poincaré 1966 (p.231-263).

[2] S. Kwapien : Operators factorizing through L^p spaces. A paraître (voir aussi colloque d'analyse fonctionelle, Bordeaux. Mai 1970 CNRS).

[3] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in L^p-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968) (p.275-326)